

ALGEBRĂ VECTORIALĂ

- ① Fie triunghiul ABC . Notăm cu \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} vectorii \vec{BC} , \vec{CA} și respectiv \vec{AB} .

Să se exprime cu ajutorul lor vectorii ce conclud cu medianele triunghiului și să se arate că aceștia pot forma un triunghi.

Indicație Dacă $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$ și $\vec{CC'}$ sunt cele trei mediane ale triunghiului lui, atunci avem $\vec{AA'} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \dots$

Se ține cont de rezultatul: trei vectori oarecare închid un triunghi dacă și numai dacă suma lor este vectorul nul.

- ② Fie triunghiul ABC , G centrul său de greutate și M un punct oarecare. Să se demonstreze că:

a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$;

b) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

- ③ Se consideră vectorii:

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}; \quad \vec{b} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{k}.$$

Să se determine $\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ și $\vec{v}_2 = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{d}$.

Răspuns. $\vec{v}_1 = -4\vec{i} + 8\vec{j}$; $\vec{v}_2 = -8\vec{i} + 12\vec{j} - 11\vec{k}$.

- ④ Fie \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} trei vectori necoplanari. Să se cerceteze dacă vectorii:

1) $\vec{u}' = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{v}' = -\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$; $\vec{w}' = -\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$;

2) $\vec{u}' = \vec{w}$; $\vec{v}' = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{w}' = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$;

3) $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{w}' = -\vec{u} + \vec{w}$;

TEMA NR. 8

pagina 2

$$4) \vec{u}' = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}; \vec{v}' = 2\vec{u} + 3\vec{v} + 4\vec{w}; \vec{w}' = 3\vec{u} + 4\vec{v} + 5\vec{w}$$

Sunt coplanari și în caz afirmativ să se găsească relația dintre ei.

Indicație. Se ține cont că trei vectori necoplanari formează o bază în spațiul liniar real tridimensional al vectorilor geometrici V_3 . Se scrie matricea de trecere C de la baza $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ la fiecare sistem de vectori. Se calculează $\text{rang } C$. Dacă $\text{rang } C \leq 2$ vectorii sunt coplanari (linear dependenți), iar dacă $\text{rang } C = 3$ vectorii sunt necoplanari sau linear independenți.

Răspuns 1) $r = 2$, coplanari; 2) $r = 2$, coplanari; 3) $r = 3$, necoplanari; 4) $r = 2$, coplanari.

În caz că sunt coplanari relația dintre ei este:

$$1) \vec{w}' = -\vec{u}' - \vec{v}'; 2) \vec{w}' = 2\vec{u}' + \vec{v}'; 4) \vec{u}' = 2\vec{v}' - \vec{w}'$$

⑤ Se dau vectorii geometrici $\vec{u} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \lambda\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii să fie coplanari și în acest caz să se descompună vectorul \vec{u} după vectorii \vec{v} și \vec{w} .

⑥ Se dau vectorii geometrici $\vec{a} = (\lambda - 1)\vec{i} + \vec{j} - \lambda\vec{k}$ și $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} - \vec{k}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii \vec{a} și \vec{b} să fie ortogonali.

Răspuns. Din $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

TEMA NR. 8

pagina 3

7) Fie vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{k}$.

Să se calculeze:

- produsul lor vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;
- să se verifice că vectorul obținut este perpendicular pe \vec{v}_1 , dar și pe \vec{v}_2 ;
- aria paralelogramului construit pe \vec{v}_1 și \vec{v}_2 ;
- unghiul dintre cei doi vectori.

Răspuns. a) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{i} - \vec{k}$;

b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = 0, \dots$

c) $\mathcal{A} = \text{aria paralelogramului} =$
 $= \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \sqrt{2}$

d) $\cos \varphi = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, unde $\varphi = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

8) Se dau punctele $A(2, 3, -1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(3, 1, 1)$. Să se determine:

- vectorii de poziție ai celor trei puncte: \vec{OA} , \vec{OB} și \vec{OC} ;
- aria triunghiului ABC ;
- mişlocul segmentului AB și centrul de greutate G al triunghiului.

Răspuns. a) $\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \dots$

b) $\mathcal{A} = 3$;

c) dacă D este mișlocul lui AB , atunci $D(2, 2, 1)$;

d) $G(7/3, 5/3, 1)$.

TEMA NR. 8
pagina 4

9) Se dau punctele $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$ și $D(-5, -4, 8)$. Să se determine:

- 1) volumul tetraedrului $ABCD$ și lungimea înălțimii coborâtă din D pe planul ABC ;
- 2) unghiul dintre muchiile tetraedrului.

Răspuns. 1) $\text{Vol} = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| =$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3}; h_D = 11.$$

$$2) \cos(\angle AB, AC) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = -\frac{10}{\sqrt{13} \cdot 17} \dots$$

10) Se dau vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ și $\vec{v}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Să se calculeze produsele vectoriale $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ și $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$ și să se compare rezultatele.

11) Să se rezolve ecuația vectorială $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}$ știind că $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Răspuns. Dacă $\vec{v} = (x, y, z)$, atunci rezultă $x = \frac{5}{2} - \frac{\alpha}{2}$; $y = \frac{3-\alpha}{2}$; $z = \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

12) Să se rezolve sistemul de ecuații vectoriale
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{v} = 1 \\ \vec{b} \times \vec{v} = \vec{c} \end{cases}$$
 știind că: $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$,
 $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ și $\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
Răspuns $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.